Concursul Fractal

A doua Ediție, 8 Decembrie 2024

Problema 1. Numerele naturale nenule a, b, c sunt astfel încât $\frac{a+b}{b+c}$ este pătratul unui număr rațional, iar $ab+bc+ca$ este un număr prim. Aflați toate valorile posibile ale lui $\frac{a+b}{b+c}$.

Soluție: Condiția e echivalentă cu faptul că numărul $(a+b)(b+c)$ este un pătrat perfect. Fie $(a+b)(b+c)=x^2$. Observăm că $x^2-b^2=ab+bc+ca$, care este prim. Deci, numărul $(x-b)(x+b)$ e prim, ce înseamnă că unul din cei doi factori este egal cu 1, și clar $x-b=1$, deci $(b+a)(b+c)=x^2=(b+1)^2$, ce înseamnă că $a=c=1$, deci raportul dat este egal cu 1.

Problema 2. În colțul din stânga jos al unei table de șah (cu câte 8 rânduri și 8 coloane), se află un rege. Marius și Alexandru joacă un joc, Alexandru merge primul. Pe rând, aceștia mută regele, fie în dreapta, fie în sus, fie în dreapta sus, cu câte exact un pătrățel. Câștigă cel ce duce regele în pătrățelul din colțul din dreapta sus. Cine va câștiga dacă ambii jucători joacă optim?

Soluție: Această problemă are multe soluții, dar cea mai scurtă ar fi să considerăm tabla de șah în care fiecare pătrățel e colorat roșu dacă are ambele coordonate pare și albastru altminteri. Vom arăta că Alexandru poate câștiga, căci începe de pe un pătrățel albastru. Strategia sa va fi, la fiecare mutare, să mute regele pe un pătrățel roșu. E clar că apoi, Marius oricum nu ar muta, ajunge pe un pătrățel albastru, și deci nu va putea câștiga nicicum, căci pătrățelul din colțul din dreapta sus e roșu.

Problema 3. Numerele pozitive nenule a, b și c satisfac $abc = 1$. Arătați că:

$$\frac{1}{a^2+a} + \frac{1}{b^2+b} + \frac{1}{c^2+c} \geq \frac{3}{2}$$

Soluție: Fie $\frac{1}{a} = x$, $\frac{1}{b} = y$, $\frac{1}{c} = z$, e clar că $xyz = \frac{1}{abc} = 1$. Inegalitatea se rescrie ca:

$$\frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+1} + \frac{z^2}{z+1} \geq \frac{3}{2}$$

Iar conform inegalității Cauchy-Buniakovski-Schwartz, partea stângă e cel puțin $\frac{(x+y+z)^2}{x+y+z+3}$. Și notând $x+y+z = s$ vrem să arătăm că $s^2 \geq \frac{3}{2}(s+3)$, pentru $s \geq 3$, ce e evident.

Problema 4. În triunghiul ABC, punctele D, E și F sunt picioarele perpendicularelor duse pe laturile opuse din A, B și C respectiv. Punctul X_A este astfel încât un cerc prin E și F este tangent la cercul circumscris triunghiului ABC în X_A, analog definim X_B și X_C. Arătați că dreptele AX_A, BX_B și CX_C sunt concurente.

Soluție: Observăm că, aplicând lema referitor la concurența axelor radicale cercurilor (ABC); $(BCEF)$; $(E$ tangenta comună a celor două cercuri trece prin punctul de intersecție al dreptelor BC și EF, fie acest punct P_A. Deci $\frac{BX_A}{X_AC} = \frac{P_AX_A}{P_AC} = \frac{\sqrt{P_AB \cdot P_AC}}{P_AC} = \sqrt{\frac{P_AB}{P_AC}}$. Pentru concurență, conform teoremei trigonometrice a lui Ceva, e necesar să avem $\prod \frac{X_AB}{X_AC} = 1$, deci $\prod \frac{P_AB}{P_AC} = 1$, ce e evident, căci $\frac{P_AB}{P_AC} = \frac{DB}{DC}$ și analoagele, iar înălțimile sunt concurente.